UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2017-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **20/10/2017**
DACBHCC

EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

El arrastre total de un aeroplano se estima por medio de:

$$D = 0.001\sigma V^2 + \frac{0.95}{\sigma}\left(\frac{W}{V}\right)^2$$

donde D=arrastre, se tomaron los siguientes datos:

- El peso (W) = 16 000 con 0.5% de precisión
- Razón de la densidad del aire entre la altura de vuelo y nivel del mar (σ) = 0.6
- Velocidad(V) =800 con 1% de precisión.

a) **(0.5 P)** Calcule el valor aproximado del arrastre.
b) **(2.0 P)** Calcule el error absoluto y relativo del resultado anterior
c) **(1.0 P)**¿Cuántos decimales exactos tendría la mayor cota del valor aproximado, considerando que el valor exacto del arrastre es 1018.5 ?
d) **(1.5 P)** Desarrolle un script en MATLAB para hallar el ítem b)

Problema 2

En la estructura de la Fig. A debe ser estudiada estática y dinámicamente. En el caso estático, se deben determinar tanto las reacciones de los rodamientos como las fuerzas de las barras.

Desde la posición de equilibrio estático, los siguientes resultados de sistema de ecuaciones reducidas:

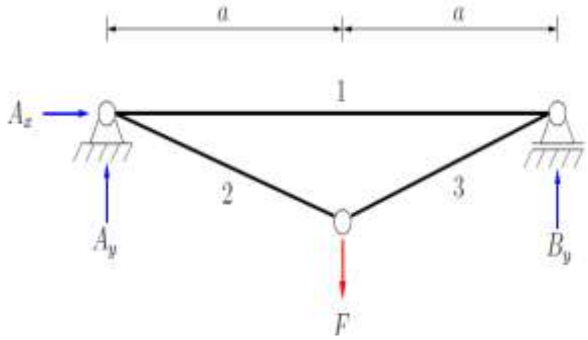


Fig. A Estructura a estudiar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} A_y \\ B_y \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ F.a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Para resolver las fuerzas requeridas, primero se debe fusionar el sistema de ecuaciones con una matriz de permutación P que inicialmente es la matriz identidad. Las filas de P que deben intercambiarse de acuerdo con el siguiente esquema:

fila3 en la fila 2
fila 5 en la fila 3
fila 2 en la fila 4
fila 4 en la fila 5

a) **(1.0 P)** Determine la matriz de permutaciones P y calcule $\hat{A} = P * A$ y $\hat{B} = P * B$

b) **(2.0 P)** Aplique el método de la Eliminación Gaussiana al sistema permutado $\hat{A}x = \hat{B}$ y diga los valores de los principales esfuerzos si $a = 1\ m$ y $F = 10\ KN$.

c) **(2.0 P)** Determine las Matrices L y U de la factorización de Doolitle.

Problema 3

Sea el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 2 & a+1 \\ a-1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a) **(1.0 P)** Para qué valores de a el sistema es compatible y determinado?

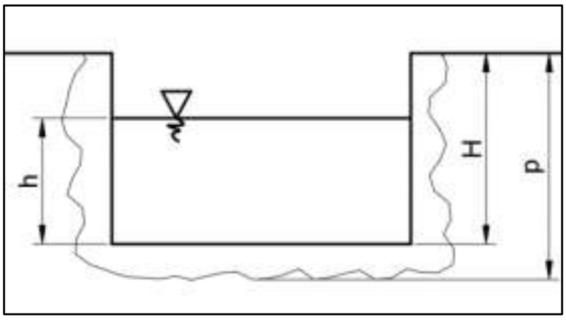
b) **(1.0 P)** Para qué valores de a el sistema converge para Jacobi de acuerdo al criterio del radio espectral?

c) **(1.0 P)** Para qué valores de a el sistema converge para Jacobi a pesar de no tener la diagonal estrictamente dominante?

d) **(1.0 P)** Aplique Jacobi con una tolerancia de 0.01, con a=0, partiendo de un vector inicial nulo y muestre el error en cada paso.

e) **(1.0 P)** Escriba un programa en MATLAB que imprima todos los valores de a (tal que a=-10:0.1:10) para los cual hay convergencia de Gauss-Seidel. Debe evaluar para cada valor de a el radio espectral.

Problema 4



La siguiente figura muestra los parámetros de la sección de un canal acabado. Se desea diseñar un canal para regadío, considerando las extensiones de cultivo a cubrir, se ha estimado un caudal de agua (Q) necesario de $1\,\frac{m^3}{s}$ y debido a los espacios disponibles, se usará un ancho constante(L) de 1 m. Para la profundidad de la zanja (p) se debe considerar 0.2 m de capa de concreto adicional a la profundidad de acabado (H). Además, se debe considerar un factor de seguridad (f) de 1.5 respecto al nivel de agua(h), para evitar posibles desbordes. El modelo matemático es: $Q = 1.84(L - 0.1h)h^{1.5}$ $\quad f = \frac{H}{h}$

a) **(1.0 P)** Estime el nivel de agua usando el método de la bisección usando 2 iteraciones, si se sabe que el nivel de agua debe estar entre 0m y 1m.

b) **(1.0 P)** Cuantas iteraciones se necesita como mínimo para el ítem(a) si se desea alcanzar un error máximo de 10^{-5}.

c) **(2.0 P)** Estime el nivel de agua usando el método del punto fijo hasta alcanzar un error máximo de 0.1, asumiendo como punto de partida 1m, si se considera el despeje de la forma siguiente: $h = \{a(1 - 0.1h)\}^{b}$

d) **(1.0 P)** Desarrolle un programa en MATLAB que permita automatizar el proceso iterativo del ítem (c) para estimar el nivel de agua hasta lograr un error de 10^{-14}, además deberá calcular la profundidad de la zanja.

Los Profesores

Solucionario

Problema 1

a) Reemplazando:

$$D = 1\,017{,}3$$

b)

Calculando los errores parciales

$eW = 80$

$e\sigma = 0$

$eV = 8$

$$\frac{\partial D}{\partial W} = \frac{0{,}95}{\sigma} \times \frac{1}{V^2}(2W)$$

$$\frac{\partial D}{\partial V} = 0{,}001\sigma(2V) + \frac{0{,}95}{\sigma}\left(-\frac{2}{V^2}\right)W^2$$

$$eD = \left|\frac{\partial D}{\partial W}\right| eW + \left|\frac{\partial D}{\partial W}\right| eV$$

Haciendo los reemplazos

eD= 11.32

δD= 0.0111=1.11%

D=1017,3±11.32

c)

|1017.3+11.32 -1018.5|=10.12<=0.5*10 ^-(-2)=50

Por lo tanto la cantidad de cifras significativas es 0

d)

```
D='0.001*0.6*V^2+(0.95/0.6)*(W/V)^2'

fD=inline(D,'V','W')

dDdv=inline(diff(D,'V'))

dDdw=inline(diff(D,'W'))

eD=abs(dDdw(800,16000))*80+abs(dDdv(800,16000))*8

edR=eD/fD(800,16000)
```

Problema 2

a)

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$L_{41} = 1$, $L_{52} = \frac{1}{2a}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ -F \\ -\frac{F}{2} \end{bmatrix}$$

$L_{42} = -\frac{1}{2a}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \cdot a \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \\ -\frac{F}{2} \end{bmatrix}$$

Solución

$$S_3 = \frac{F}{2}\sqrt{2} = 7.071kN$$
$$S_2 = \frac{F}{2}\sqrt{2} = 7.071kN$$
$$S_1 = -\frac{F}{2} = -5kN$$
$$B_y = \frac{F}{2} = 5kN$$
$$A_y = \frac{F}{2} = 5kN$$
$$A_x = 0kN \quad \text{De la Fig. a}$$

c)

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

a) Para que el sistema sea compatible y determinado (solución única) basta que det(A) sea diferente de cero:

$$\det(A) = 6 - (a^2 - 1) \neq 0$$

$$a \neq \pm\sqrt{7}$$

b)

$$Tj = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a+1}{2} \\ -\dfrac{a-1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(Tj - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{a^2 - 1}{6}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 1}{6}}$$

$$\rho(Tj) = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{6}} < 1$$

$$-\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$$

c) Para diagonal estrictamente dominante:

$$|a+1| < 2$$

$$|a-1| < 3$$

$$-2 < a < 1$$

Valores de a para que haya convergencia de Jacobi a pesar de no tener diagonal estrictamente dominante: $a \in < -\sqrt{7}, -2] \cup [1, \sqrt{7}]$

d)

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X^{(N+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} X^{(N)} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$err = \left\| X^{(N+1)} - X^{(N)} \right\|_\infty$$

Se ha considerado como estimador del error la norma infinita del vector diferencia:

x1	**x2**	**Err**
0	**0**	**--------**
2.5000	**2.3333**	**2.5000**
1.3333	**3.1667**	**1.1667**
0.9167	**2.7778**	**0.4167**
1.1111	**2.6389**	**0.1944**
1.1806	**2.7037**	**0.0694**
1.1481	**2.7269**	**0.0324**
1.1366	**2.7160**	**0.0116**
1.1420	**2.7122**	**0.0054**

e)

```
acum=[];
for a=-10:0.1:10
   A=[2 a+1;a-1 3];
   D=diag(diag(A));
   L=D-tril(A);
   U=D-triu(A);
   Tg=inv(D-L)*U;
   rhoG=max(abs(eig(Tg)));
   if rhoG<1
      acum=[acum;a];
   end
end
disp(acum)
```

Problema 4

item a)

Se considera: $f(h) = 1 - 1.84(1 - 0.1h)h^{1.5}$
Iteración 1: $f(0) = 1$, $f(1) = -0.65$, $f(0.5) = 0.38$ $=> h = 0.5$
Iteración 2: $f(0.5) = 0.38$, $f(1) = -0.65$, $f(0.75) = -0.1$ $=> h = 0.75$
Iteración 3: $h = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625m$

item b) aplicando la relación:

$$n = Log_2 \frac{b-a}{error} = Log_2(1/10^{-5}) = 16.6$$

Por lo tanto se necesita=17 iteraciones

item c) Luego de despejar:

$$h = 1.84(1 - 0.1h)h^{-2/3}$$

Partiendo de h=1
Iteración 1: h=0.7144 error=0.2856
Iteración 2: h=0.6997 error=0.0147
Por lo tanto el nivel de agua es: 0.6997

Parte d)

```
g=inline('(1.84*(1-0.1*h))^-(1/1.5)')
h0=1;
error=5;
tol=1e-14;
while error>tol
    h=g(h0)
    error=abs(h-h0);
    h0=h;
end
H=1.5*h
p=H+0.2
fprintf('nivel de agua %.2f\nprofundidad de zanja %.2f\n',h,p);
```